第 23 講　数列(1)

1　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 b，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ があり，数列 $\{c_n\}$ は $c_n=a_n+b_n$ により定まる数列とする．a，b，d，r がすべて正の整数で，$c_1=4$，$c_2=9$，$c_3=17$ のとき，以下の設問に答えよ．

(1)　a，b，d，r の値を求めよ．

(2)　数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a，b，c は相異なる実数で，$abc=-27$ を満たしている．さらに，a，b，c はこの順で等比数列であり，a，b，c の順序を適当に変えると等差数列になる．このとき，a，b，c の値を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　数列 $\{a_n\}$ を初項 3，公比 3 の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 11，公差 8 の等差数列とする．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を小さいものから順に並べて得られる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　数列(1)

等差数列2，5，8，…… を $\{a_n\}$，等比数列2，4，8，…… を $\{b_n\}$ とし，$\{b_n\}$ の項のうち $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ をつくるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a_n=$ [ア] $n-$ [イ]，$b_n=$ [ウ]^n である．

(2)　$a_l=b_m$ が成り立つとすると，[ア] $l-$ [イ] $=$ [ウ]^m である．

ここで [ウ]$^{m+1}$，[ウ]$^{m+2}$ を考えることにより，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の共通項は公比 [エ] の等比数列であることがわかり，その初項は [オ] である．したがって，数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=$ [カ]$^{2n-\text{[キ]}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　数列(1)

1　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 b，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ があり，数列 $\{c_n\}$ は $c_n=a_n+b_n$ により定まる数列とする．a，b，d，r がすべて正の整数で，$c_1=4$，$c_2=9$，$c_3=17$ のとき，以下の設問に答えよ．

(1)　a，b，d，r の値を求めよ．

(2)　数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　$a_n=a+(n-1)d$　　$b_n=b\cdot r^{n-1}$　より　$c_n=a_n+b_n=a+(n-1)d+b\cdot r^{n-1}$

$c_1=4$ より　$a+b=4$　……①　　$c_2=9$ より　$a+d+br=9$　……②

$c_3=17$ より　$a+2d+br^2=17$　……③

③$-2\times$②より　$br^2-2br-a=-1$

これに①すなわち　$a=4-b$　を代入して整理すると

$br^2-2br+b=3$　つまり　$b(r-1)^2=3$　　b，r は正の整数より　$b=3$，$r-1=1$ のみ．

このとき①より　$a=1$　これらと②より　$d=2$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ d=2,\ r=2}$

(2)　$c_n=1+(n-1)\cdot2+3\cdot2^{n-1}=2n-1+3\cdot2^{n-1}$

よって，求める和は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}+\frac{3(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{n^2+3\cdot2^n-3}$

2　a，b，c は相異なる実数で，$abc=-27$ を満たしている．さらに，a，b，c はこの順で等比数列であり，a，b，c の順序を適当に変えると等差数列になる．このとき，a，b，c の値を求めよ．

a，b，c はこの順で等比数列であることより　$b^2=ac$

これと $abc=-27$ より　$b^3=-27$　　よって　$b=-3$，$ac=9$

a，b，c の順列は $3!=6$（通り）あるが，例えば a，b，c がこの順に等差数列なら，c，b，a もこの順に等差数列である．よって，次の3通りの場合で考える．

(i)　a，b，c の順で等差数列　　(ii)　a，c，b の順で等差数列

(iii)　b，a，c の順で等差数列

(i)のとき　　$2b=a+c$　つまり　$a+c=-6$

これと $ac=9$ より　a，c は2次方程式　$t^2+6t+9=0$　の2解

解くと　$t=-3$（重解）よって　$a=c$ となり不適．

(ii)のとき　　$2c=a+b$　つまり　$a=2c+3$　　これと　$ac=9$ より

$c(2c+3)=9$　　$2c^2+3c-9=0$　　$(2c-3)(c+3)=0$　　$c=\dfrac{3}{2}$，-3

$c=-3$ のとき $a=-3$ となり不適．　$c=\dfrac{3}{2}$ のとき $a=6$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(iii)のとき　$2a=b+c$　つまり　$c=2a+3$　　よって(ii)より　$a=\frac{3}{2}$，$c=6$

以上より，求める a，b，c は　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(6,\ -3,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ -3,\ 6\right)}$

[3] 数列 $\{a_n\}$ を初項 3，公比 3 の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 11，公差 8 の等差数列とする．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を小さいものから順に並べて得られる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$　　$b_n=11+8(n-1)=8n+3$

$a_l=b_m$ とすると　$3^l=8m+3$　……①

$l=1,\ 2$ のとき　$3^l\leqq9<11=b_1$　より　a_l は共通項ではない．

$l=m=3$ のとき　①は両辺ともに 27 となる．よって　$c_1=27$

$3^{l+1}=3\cdot3^l=3(8m+3)=8(3m+1)+1$

よって　(8 の倍数)＋3　の形とならない．したがって　3^{l+1} は共通項とならない．

$3^{l+2}=9\cdot3^l=9(8m+3)=8(9m+3)+3$

よって　(8 の倍数)＋3　の形となる．つまり　3^{l+2} は共通項となる．

したがって，a_l つまり 3^l が共通項のとき，$a_{l+2}=9a_l$ も共通項である．

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 27，公比 9 の等比数列である．

ゆえに　$c_n=27\cdot9^{n-1}=3\cdot9^n=\boldsymbol{3^{2n+1}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　数列(1)

等差数列2，5，8，…… を $\{a_n\}$，等比数列2，4，8，…… を $\{b_n\}$ とし，$\{b_n\}$ の項のうち $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ をつくるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a_n=$ ア $n-$ イ ，$b_n=$ ウ ^{n} である．

(2)　$a_l=b_m$ が成り立つとすると， ア $l-$ イ $=$ ウ ^{m} である．

ここで ウ $^{m+1}$， ウ $^{m+2}$ を考えることにより，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の共通項は公比 エ の等比数列であることがわかり，その初項は オ である．したがって，数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=$ カ $^{2n-\text{キ}}$ である．

(1)　$a_n=2+(n-1)\cdot3=\mathbf{3}n-\mathbf{1}$　　$b_n=2\cdot2^{n-1}=\mathbf{2}^n$

(2)　$a_l=b_m$ とすると　$\mathbf{3}l-\mathbf{1}=\mathbf{2}^m$　……①　このとき

$2^{m+1}=2\cdot2^m=2(3l-1)=3(2l-1)+1$

よって　(3の倍数)-1　の形とならず，数列 $\{a_n\}$ の項にはなり得ない．

$2^{m+2}=4\cdot2^m=4(3l-1)=3(4l-1)-1$

よって　(3の倍数)-1　の形となり，数列 $\{a_n\}$ の項になり得る．

したがって　$b_{m+2}=4\cdot b_m$　より　共通項は公比 **4** の等比数列である．

また，$l=1$，$m=1$ は①を満たし，両辺は2　　よって　共通項の初項は **2** である．

ゆえに　$c_n=2\cdot4^{n-1}=\mathbf{2}^{2n-\mathbf{1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。